12) Simon Sechter (11.10.1788-10.9.1867), österreichischer Komponist und Theoretiker. Sein theoretisches Hauptwerk, Die Grundsätze der musikalischen Komposition (3 Bde., Wien 1853-54) fußt u.a. auf der Theorie Rameaus.

13) Zulauf, a.a.O., S. 10.

14) Romantische Harmonik, Berlin ^{2}/1923, S. 128f., Zulauf, a.a.O., S. 22.

15) Zulauf, a.a.O., S. 38ff.

16) Zulauf, a.a.O., S. 43. Im Original "Auslösungsakkord" scheint ein Druckfehler anstelle des sinngemäßen Wortes "Auflösungsakkord".

17) Zulauf, a.a.O., S. 47.

18) A.a.O., S. 44.

19) A.a.O., S. 57, S. 72.

20) A.a.O., S. 60.

21) A.a.O., S. 63.

22) A.a.O., S. 63f.

23) A.a.O., S. 64.

24) A.a.O., S. 67.

25) A.a.O., S. 78f.

26) A.a.O., S. 78.

27) A.a.O., S. 78.

28) A.a.O., S. 82f., S. 83.

29) Eggebrecht, a.a.O., S. 15f.

30) Hierzu vom Verfasser "Ein Zwölftonfeld bei Johann Sebastian Bach?", Bach-Studien 5 (Werner Neumann zum 65. Geburtstag), Leipzig 1975, S. 43-48.

31) Hierzu vom Verfasser "Nikolaj Andreevič Roslavec, ein früher Zwölftonkomponist", in: Mf 22 (1969), S. 22-38.

Herbert Anton Kellner:

BAROCKE AKUSTIK UND NUMEROLOGIE IN DEN VIER DUETTEN: BACHS "MUSICALISCHE TEMPERATUR"

1. Die innere Einheit von Bachs Musik

In dem Bach-Heft der ÖMZ habe ich ein Forschungsprogramm erstellt, die Kompositionen Bachs unter dem Gesichtspunkt der wohltemperirten Stimmung zu untersuchen[1]. Dieser programmatische Vorschlag beruht auf der Beobachtung, daß Bach seine Musik vermittels eines Zahlensatzes strukturiert hat, der zu seiner ungleichschwebenden Cembalostimmung gehört. Dadurch erzielt Bach eine Unifikation zwischen Harmonie und Struktur in seinem

Werk - zu einer höheren Einheit. Die Strukturierung nach diesem abstrakt-mathematischen Prinzip, hierarchisch der "musikalischen Form" übergeordnet, manifestiert sich über alles Abzählbare der Musik und kann in Zusammenhang mit Bachs ars inveniendi als numerologischer Manierismus betrachtet werden. In der dispositio und elaboratio wirkt dieser als entscheidendes konstruktives Element. Verwendet werden: Taktzahlen, Taktlängen, Tonanschläge, Anwendungen des Zahlenalphabets und, im Hinblick auf die Unität als Inbegriff der Perfektion der barocken unitas, architektonische Zentrumsbildungen in Bachs musikalischen Zahlengebäuden. Es ist primär diese Idee und nach diesem Prinzip, daß in Bachs C-Dur Dreiklang, einem Symbol der Tri-Unität, dessen Terz und Quint, c+e, c+g, im Verhältnis 1:1 gleich schnell zusammenschweben. Aus diesem zentralen Dreiklang leitet sich die wohltemperirte Stimmung ab. Mit deren charakteristischem Zahlensatz strukturiert Bach seine Musik, welche unter diesem Aspekt analysiert werden kann.

Zu seiner Ausgabe der "Clavierübung" III schreibt Manfred Tessmer[2]: "Ebenso rätselhaft wie die vier Duette selbst - sie haben sich bisher allen noch so scharfsinnigen und mit erheblichem intellektuellen Aufwand angelegten Deutungsversuchen renitent gezeigt - ist ihre Anordnung in einer Umgebung von Orgelstücken, die bis zur Sechsstimmigkeit reichen". Diese Bemerkungen legen es nahe, die Methoden meines "Wiener Manifests" an den Duetten zur Bewährung zu erproben und zu bestätigen. Übrigens erlaubt die Zweistimmigkeit drei Zählungen der Töne entlang des Taktablaufes, nämlich die beiden Stimmen separat, sowie zusammen ("Töne" soll ab hier immer "Tonanschläge" bedeuten). Es muß also festgehalten werden, daß es bisher nicht gelungen war, die Finalität der Duette innerhalb der "Clavierübung" zu erkennen. Ziel dieser Untersuchung ist es, unter dem einheitlichen Gesichtspunkt von Bachs M u s i c a l i s c h e r T e m p e r a t u r, dieses Problem zu klären.

2. Die akustischen Grundbegriffe im Barock

Zweck dieses Kapitels ist zu zeigen, daß bereits Ende des 17. Jahrhunderts die Voraussetzungen für das Verstehen des Schwebungsmechanismus temperierter Intervalle vorlagen - insbesondere auch mathematisch-quantitativ. Für allgemeine Grundlagen siehe Dostrovsky[3]. Es werden hier nicht etwaige Berechnungen Bachs vermittels des Rüstzeugs der Geschichte der Mathematik rekonstruiert und nachvollzogen, vielmehr sollen die Betrachtungen auf die physikalisch-begrifflichen Grundlagen beschränkt bleiben.

Werckmeister wußte, daß die Oktave eines Tones doppelt so schnell schwingt, wie der Grundton[4], und nicht etwa 8-mal schneller, "auch wenn man propter celeritatem die percussiones nicht zählen kan". Daher muß ihm auch klar gewesen sein, daß die Frequenzen der percussiones sich reziprok zu den Monochordlängen verhalten, siehe Tabelle 1. Auch war er mit dem Teiltonaufbau vertraut, so wie von seinem Schüler Johann Gottfried Walther beschrieben[5]. In seinen Praecepta zitiert dieser Musiker ein "Mathematikbuch" von Marty[6] zur Lehre und Nomenklatur der Proportionen, welche sich als ganz wesentlich herausstellen wird. Bach selbst war zweifellos mit der Teiltonreihe vertraut; insbesondere auch mit den "unharmonischen" Obertönen 7, 11 und 13, wie es sein Bläsersatz vielfältig ausweist[7]. Es ist ihm selbstverständlich, daß der Spieler mit den Lippen und durch die Art des Anblasens die "falschen" Töne auf die korrekte Tonhöhe hin modifiziert.

Zu den Schwebungen formulierte bereits Schlick 1511, daß sich dabei "etwas sperrt und mehr oder weniger ineinander begehrt". Ist das nicht das Bild eines Nonius, wobei z.B. 10 gegen 11 Teilungen laufen? Von den Schwebungen identisch temperierter Intervalle weiß Werckmeister, daß diese zum Diskant hin aus der Klaviatur verschoben, schneller werden[8] und begründet damit, warum "alle Stimmungen aus dem vierfüssigen am besten geschehen können", also aus dem Bereich der kleinen Oktave. Wesentlich ist vor allem, daß

man die Schwebungstonhöhen hört, und diese mit Kenntnis der Teiltonreihe, sowie der Relativfrequenzen der Intervalle, auch verifizieren kann; rational und kohärent.

Werckmeister behandelt eine temperierte Quint, die gegenüber deren Reinintervall 3/2 leicht verkleinert ist[9], nämlich um 293/292. Die resultierende Quint hat das Schwingungsverhältnis (3/2)x(292/293). Ein Bruch wie 293/292, dessen Zähler den Nenner um 1 übertrifft, heißt überteiliges Verhältnis, hier von 292; im Barock, "ratio superparticularis". Allgemein, von einer Zahl N, ist dies der Bruch (N+1)/N. Die einfachen musikalischen Intervalle haben diese Form, und auch die Kommata lassen sich so anschreiben, entweder exakt oder approximiert.

In musikalischen Tonsystemen dürfen Oktaven nicht temperiert werden - sie klingen sonst falsch. Je "komplizierter" die Intervalle der folgenden Reihe werden: Oktave, Quint und Quart, Groß- und Kleinterz, desto stärker dürfen sie innerhalb einer Temperatur verstimmt werden, ohne durch üblen Klang aufzufallen. Auch dies war Werckmeister bekannt. Nach den reinen Oktaven ist das erste temperierbare Intervall die Quint. In Bachs Cembalostimmung sind die temperierten Quinten um ein Bachkomma verkleinert, approximiert durch B=370/369. Diese unterschwebenden Quinten haben daher die Größe (3/2)x(369/370). Obige Aspekte sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1:
Intervalle und Kommata als überteilige Verhältnisse verschiedener N, sowie maximal tolerable Verstimmung der Intervalle.

N	(N+1)/N	Intervall bzw. Komma	Maximal erträgliche Temperierung, cent
1	2/1	Oktave	Muß rein bleiben
2	3/2	Quint	5.5¢
3	4/3	Quart	5.5¢
4	5/4	Großterz	21.5¢
73	74/73	Pyth. Komma	
80	81/80	Synt. Komma	
369	370/369	Bachkomma B	

Aus einer anderen Charakterisierung der Bachstimmung über deren Quintzahlen 1, 4, 7, liefert numerologische Juxtaposition die Möglichkeiten 147, 174, 417, 471 und 741. Ähnlich verhält es sich mit den Ziffern der 5 wohltemperirten Quinten insgesamt und den 7 reinen Quinten: 57 und 75 - eine Vielzahl von Möglichkeiten. Dagegen ist als Ergebnis festzuhalten, daß die charakteristische Temperierung der Bachquint durch die "ratio superparticularis" von 369 ausgedrückt wird. Mit dieser einzigen Zahl wird im Sinne der Nomenklatur der barocken Akustik und Mathematik Bachs wohltemperirte Stimmung quantitativ und eindeutig spezifiziert.

3. Untersuchungen der Duette: numerologisch und akustisch

Die Duette werden hier unter den drei Hauptaspekten Taktlängen, Tonanschläge und Zahlenalphabet betrachtet. Insbesondere werden die von Bach benutzten architektonischen Zentrumsbildungen als konstruktive Basis aufgezeigt. Dieses Vorgehen unterscheidet sich wesentlich von den Arbeiten anderer Autoren, deren Ergebnisse hier vorausgesetzt werden[10]: Birk, Brückner, von Fischer, Friedemann, Keller und van Huystee.

3.1 Taktlängen und Taktzahlen als Hauptaspekt

Die vier Duette zusammen haben insgesamt 369 Takte - die Zahl des Bachkommas. War sich der Komponist dieser Tatsache bewußt? Dies soll zuerst numerologisch und sodann über den musikalischen Text untersucht werden, indem das architektonische Zentrum der Duette bestimmt wird, in welchem deren Taktzahl nach der Unität geteilt ist. Aus der Darstellung 369=184+1+184 ergibt sich der Mitteltakt 185. Über dessen Ziffernsumme 1+8+5=14, dem Namen BACH (= 2+1+3+8) entsprechend, nimmt der Komponist die architektonische Mitte der Duette ein. Vertrautheit mit dem bei Bach üblichen Zahlenalphabet zeigt weiter, daß dieser Mitteltakt 185 auf die Tri-Unität, die Basis von Bachs Musik zentriert ist; UNITAS = 80, TRINITAS = 105; 80+105=185. Dieses Zentrum fällt in Duetto II als dessen Takt 112 (= CHRISTUS). Im Mittelpunkt der Duette, gemäß der unitas, tritt der mediator, in seiner Funktion als Mittler auf. Nach dieser Numerologie, zur Musik selbst, siehe Beispiel 1.

Beispiel 1

Dieser Takt leitet innerhalb der Da-Capo-Form ABA zur Reprise des ersten Teiles über und erscheint auf den ersten Blick recht konventionell. Er beginnt mit einem (Oktav) Unison (= unitas) auf c, dem Zentrum der Tonalität. Für diesen Ton gibt das Zahlenalphabet C=3, mit c^2 bzw. c^0 in Ober- und Unterstimme. Es folgt a^1, und wegen A=1, geben die ersten drei Noten dieses Taktes 3, 3, 1 - tri-unitär. Der Takt hat 9 Töne, "trias trinitatis per additionem", 3+3+3. Verwandelt man die Notennamen dieses Taktes nach dem Zahlenalphabet und summiert diese Werte ergibt die Oberstimme C=3, die Unterstimme 31 - tri-unitär. (Zum Zahlenalphabet für Notennamen, vgl. auch das erste isolierte Achtel, A=1, des A-Dur Fugenthemas, gefolgt von d r e i Achtelpausen, im Wohltemperirten Clavier I (= WTC I)). Schließlich kann man das Zentrum des Mitteltaktes betrachten, die beiden Noten FE. In Juxtaposition, nach dem Zahlenalphabet, hat man 65=5x13, wobei man die Ziffern dieser Zerlegung als Quint und Terz im Generalbaß interpretieren kann, und 1 = unitas. Als Parallele zeigt Vertrautheit mit dem Originaldruck der Clavierübung, daß Duetto II auf dessen Seite No. 65 beginnt, als 24. Stück (= alle Tonarten) der insgesamt 27 Nummern dieses Werkes. Was die Kontrolle von Taktzahlen, Accoladen und Seitenzahlen im Barock betrifft, siehe auch Rousseaus Musiklexikon[11]. Angesichts solcher Beobachtungen am Mitteltakt 185, dem architektonischen Zentrum der Duette, kann kein Zweifel bestehen, daß sich Bach der Gesamtzahl 369 der Takte bei der dispositio der Komposition sehr wohl bewußt war.

Bisher wurde die Mitte der Duette unter dem Aspekt der Taktzahlen analysiert, um die Signifikanz von deren Länge 369 zu belegen. Nun soll die Unterteilung der 4 Duette selbst vorgenommen werden: I, II sowie III, IV. Ein mittleres Duett existiert natürlich nicht, da deren Zahl gerade ist; 4 = Kreuzeszahl oder auch: alle Welt(richtungen). Man

findet über die Längen der Duette, 369=73+149+39+108, die Bipartition 369=222 (=6x37)+147. Letztere Ziffern sind die Quintenzahlen von Bachs Stimmung: 1 Temperierungsquint H-fis, 4 wohltemperirte und 7 reine Quinten. Als Parallele gilt im WTC I für dessen Takte 444 (=12x37)+1691=2135 (=5x7x61), wieder mit den Quintenzahlen 5 und 7, wobei 444=131+313, siehe meinen Bayreuther Kongreßbeitrag[12].

Zu Duetto II habe ich ebendort die Taktzerlegung der Form ABA analysiert, nämlich 37+75+37=149 (1+4+9=14, BACH), mit den Quintenzahlen 7,5 in der Taktlänge von B, wobei 37 über die Initialen Jesus CHRistus, J.CHR., gedeutet werden kann. Neben dieser "musikalischen" Zerlegung zeigt Siegele[13] eine andere Möglichkeit, welche die folgenden Bemerkungen angeregt hat. Diese Zusammenfassung, welche nur mathematischen und keinen musikalischen Sinn hat, lautet 149=68+13+68, und nur die 13 Mitteltakte (unitas-trinitas in Juxtaposition) sind hier ein musikalisch sinnvolles Element. Bemerkenswert ist die Primfaktorenzerlegung des Rahmens, 68=17x2x2: 1 Temperierungsquint, 7 reine Quinten und 2 Quintenpaare[14] nach deren Ziffern. Wieder darf es nicht bei der Numerologie bleiben, sondern der musikalische Text muß herangezogen werden, s. Beispiel 2a, welches Takt 68 des Duetto II zeigt:

Beispiel 2a

Über die Notenbuchstaben hat man darin ausschließlich A=1, "unitas", C=3, Terz, E=5, Quint im Generalbaß. Im Zusammenhang damit können die Anfangstakte der Duette innerhalb der Clavierübung aufgestellt werden, nämlich I: 1479, II: 1552, III: 1701 und IV: 1740. Wie man sieht, sind die Ziffern des Anfangtaktes von Duetto IV - die 1, 7, 4 - die Quintenzahlen der Wohltemperirung. Musikalisch zeigt Beispiel 2b den Beginn von Duett IV: in Takt 1, A=1, "unitas", gefolgt von C=3, E=5. Dies kann als Unitas von Terz und Quint(schwebungen) interpretiert werden.

Beispiel 2b

Im Duetto III ist musikalisch auffallend, daß in dessen Takten 28, 29 ein doppelter kreuzweiser Übergang des Themenkopfes zwischen beiden Stimmen auftritt. Innerhalb der

"Clavierübung" beginnt Duetto III mit Takt 1701, so daß diese beiden Takte in der Gesamtzählung No. 1728 und 1729 werden. Hier gilt eine besondere zahlentheoretische Beziehung: 1729 ist die kleinste Zahl, die auf zwei verschiedene Weisen als Summe zweier Kuben dargestellt werden kann, nämlich $1729=1^3+12^3=10^3+9^3$. Auch ist 1729=19x91 mit 19 für den Quintenzirkel und 91 der Krebs dieser Zahl. In der Walcha-Festschrift[15] habe ich für die Genauigkeit des Stimmverfahrens in Abhängigkeit vom Sollwert der Schwebungsproportion 6:1 für Terz und Quint in H-Dur, einen Wert 1/2829 aufgestellt. Dies könnte man über die Taktzahl 2829 einer Komposition von mindestens dieser Länge darstellen, oder über die Zahl der Tonanschläge in einem kleineren Werk. Oder aber als eine Juxtaposition inseparabler Natur, so wie dies musikalisch in den Takten 28, 29 des Duetto III der Fall ist. Wäre dieser Kunstgriff Bachs tatsächlich beweisbar, würde dies implizieren, daß Bach mit der Leibnizschen Differentialrechnung vertraut gewesen wäre, die dieser in den "Acta eruditorum", Leipzig, ab 1684 publiziert hat.

Nach diesen möglichen Manifestationen barocker Mathematik sei zu diesem Duett unter dem Aspekt der Akustik noch vermerkt, daß Takt 19 mit fis^1, dis^2 beginnt. Dies sind die Schwebungstonhöhe von Terz und Quint des H-Dur Temperierungsdreiklanges $H+dis^o+fis^o$. Der Takt hat 37 Töne und in diesem Dreiklang schweben Großterz, Quint und Kleinterz, in ganzen Zahlen, wie 12:2:23, mit 12+2+23=37.

3.2 Tonanschläge als Hauptaspekt

Tonanschläge können wie folgt verwendet werden, um Strukturen zu bilden: durch die Zahl der Töne eines Stückes insgesamt, eines Themas oder anderen Abschnittes, sowie in Verbindung mit den laufenden Taktzahlen. So beginnt in Duetto I der Diskant, als Signatur, mit 14 (= BACH) Zweiunddreißigsteln. Das Thema hat insgesamt 57=3x19 Töne; hier treten die Quintenzahlen auf, die trinitas und die Zahl des Zirkels. Der Baß wird wieder durch eine Signatur von 14 Noten eingeleitet - es sind Achtel. Mit Ausklang des Themas haben beide Stimmen 75 Töne gebracht. Duetto I ist auf einer Gesamtzahl von 491 Baßtönen aufgebaut. Dies ist, wie so häufig bei Bach, eine numerologische Zentrierung von 41 (= J.S. BACH) auf der trinitären 9, nämlich 4-9-1. Mit den 497 Diskantnoten zerlegt sich die Gesamtzahl der Töne des ersten der Vier Duette als 988=4x13x19. Interpretation: 4 = Kreuzeszahl, oder alle Welt(richtungen); 13 = Tri-Unität, 19 = Zahl des Quintenzirkels. Die Gesamtheit der Töne des Stückes erscheint hier zielgerichtet kontrolliert. Dies bestätigt sich auch für die Teilsummen bezüglich der Taktzählung. Bekanntlich gab sich Bach in seiner Familienchronik die No. 24 - als Beherrscher aller Tonarten. Zu Takt 24 im Duetto I läuft seine Signatur von 158 Diskanttönen, entsprechend JOHANN SEBASTIAN BACH. Zu Takt 53, Zahlen von Quint und Terz im Generalbaß, führen insgesasmt 714 Töne, mit den Ziffern der Quinenzahlen der Wohltemperirung, die im übrigen durch 369 charakterisiert ist. Der erste Diskantton, Takt 53, ist No. 369. Parallel dazu haben die H-Dur Stücke im WTC 19+34=53 Takte, in dem Praeludium erklingen 417 Töne. In der Figuration von Takt 14 gibt Bach die Lage seines Temperierungsdreiklanges H+dis+fis auf der Klaviatur. Vor und nach diesem Dreiklang ist C=3, A=1 und E=5, C=3. Dessen Terz als Mitte ist der 75. Ton des Basses, siehe Beispiel 3a.

Beispiel 3a

Im Mittelteil B des Duetto II hat das Thema des Kanons ab Takt 37 die tri-unitäre Zahl von 13 Tonanschlägen. In Duetto IV bringt das Thema 48 (= I.N.R.I.) Töne; es ist in 14+34 gegliedert und somit signiert. Auf der Ebene der Taktzahlen zeigt 48 wieder Bachs Temperierungsdreiklang, die Stimmquint H-fis als Figuration im Baß und dis^2, wo sonst die Terz schwebt, im Diskant, siehe Beispiel 3b. Insgesamt hat Duetto IV die Zahl von 1075 Tönen: unitas und Quintenzahlen /1075=25x43, CREDO). Parallel dazu hat Bach im Autograph vom WTC I 535 (=107x5) Accoladen gesetzt: unitas und Quintenzahlen.

Beispiel 3b

3.3 Das Zahlenalphabet als Hauptaspekt

Zum Verständnis von Bachs Gebrauch des Zahlenalphabets ist die Arbeit von Helms[16] unentbehrlich. Hier soll zunächst gefragt werden, ob die Duette tatsächlich zur "Clavierübung" gehören. Nach Schweitzer hätten sie sich beim Stich hineinverirrt; nach Keller wären sie, um den "Absatz" zu fördern, von Bach für Klavierspieler inkorporiert worden: als Duette sind sie manualiter komponiert. Dagegen soll nun die architektonische Mitte der "Clavierübung" untersucht werden, zuerst nacht Taktzahlen, sodann über die Numerierung der 27 Stücke. Zählt man jeden einmal begonnenen Takt mit, also auch Auftakte, findet man insgesamt 1964 (=4x491) Takte. War sich Bach - 4+9+1=14 - dieser Zahlen bewußt? Zum einen ist unter dem Aspekt der Töne auf dieser Zahl von Baßnoten das Duetto I fundiert. Dann ist die "Clavierübung" III insgesamt nach der unitas zweigeteilt: 1964=2x982. Genau mit Takt 982 endet Stück 15, "Vater unser im Himmelreich". Die kleine Bearbeitung folgt ab Takt 983. Die Primzahl 491 war für Bach von besonderer Bedeutung; in der Form 4-9-1 geschrieben, erscheint 41, J.S. BACH, auf der trinitären 9, numerologisch zentriert. Auch führen 491 Accoladen im Autograph des WTC zum H-Dur Praeludium. In der Walcha-Festschrift ergab meine Untersuchung der Stimmgenauigkeit vermittels der Differentialrechnung, in Abhängigkeit von der Kleinterz dis-fis, den

Wert $\frac{9}{41}$. Könnte dies ebenfalls 4-9-1 für Bach nahegelegt haben?

Zurück zu den beiden mittleren Stücken aus der Halbierung der Taktzahl, No. 15 und 16. Nach dem Zahlenalphabet gibt deren Titel:

"Vater unser im Himmelreich" = 255 = 3x17x5

mit 3,1: trinitas, unitas, 7 und 5: Quintenzahlen. Ähnlich wie bei den Duetten soll das mittlere der 27 Stücke der "Clavierübung" untersucht werden, 27=13+1+13. Wie man sieht, nimmt mit Stück 14, BACH, der Komponist wieder das Zentrum ein. Nach dem Zahlenalphabet gilt für dessen Titel folgende Korrespondenz:

"Wir glauben all' an einen Gott" = 247 = 13x19

mit 1,3: unitas und trinitas, 19: Zahl des Quintenzirkels. Man erinnert sich, daß Duetto I 988=4x247 Töne hatte. Nun besteht nach dem Zahlenalphabet folgende Beziehung:

Musicalische Temperatur = 247 = 13x19,

so daß angesichts des Faktors 4, alle Welt, der Zweck von Duetto I interpretiert werden kann als "Musicalische Temperatur in alle Welt". Darüber hinaus ist die Clavierübung III insgesamt durch den Titel des Bachschen Stückes Nr. 14 auf "Musicalische Temperatur" zentriert. Zeigen solche Aspekte nicht besser, in welchem Sinne die Duette zur Clavierübung gehören, als das Verständnis eines Schweitzer oder Keller?

Der in diesem Zusammenhang auftretende Titel von Werckmeisters wohlbekanntem Traktat, 1691, erfordert allerdings noch eine genauere Untersuchung. Teilt man dessen 22 Buchstaben im barocken Sinne nach der Perfektion der unitas, gibt das Zahlenalphabet:

11 Buchstaben 11 Buchstaben

Musicalisch e Temperatur = 247 = 13x19 (mit 2+4+7=13)

112(=CHRISTUS) + 135 = 247; 135: unitas, Terz und Quint

Man vergleiche mit diesem Gebilde Takt 112 von Duetto II, dessen Takt 68, sowie Takte 1 und 2 aus Duetto IV. Ob sich Bach dieser Gematria Werckmeisters bewußt war? Vergleichen wir damit zur Klärung dieser Frage einen Bachschen autographen Titel, in dessen authentischer Orthographie. Wieder werden dessen Buchstaben, hier 24 (= alle Tonarten), gemäß der unitas geteilt:

12 Buchstaben 12 Buchstaben

Das wohltempe = 133 = rirte Clavier; total 266 = 14x19 und 2+6+6=14

3 9 5 7

Hierin haben also die ersten 12 Buchstaben gemäß der Perfektion der unitas die nämliche Zahlensumme, wie die 12 übrigen! Nach dieser Unität schweben in der Stimmung für "Das wohltemperirte Clavier" Terz und Quint des C-Dur-Dreiklanges zusammen. Für die Buchstabenzahlen kann noch bemerkt werden, 39=3x13, tri-unitär, und daß 5 und 7 die wohltemperirten und reinen Quinten in Bachs System sind. Identisch mit dem Titel des 14. Stückes hat auch jener des 13. den Zahlenwert 247 in Isopsephie mit "Musicalische Temperatur". Die beiden Mittelbuchstaben der Titel sind bei Werckmeister HE=85=5x17 und bei Bach ER=517 (=11x47), mit 1 = unitas, 5 und 7 sind die Quintenzahlen. Diese Beobachtung läßt FE=65=5x13 in dem Zentrum des Mitteltaktes der Duette, wieder in anderem Licht erscheinen. Zu Werckmeisters Kenntnis der wohltemperirten Stimmung, siehe meine Beiträge[17] im EHM und RM1.

Man kann sich nun leicht die Finalität überlegen, nach welcher Bach in der "Clavierübung" jeweils drei oder zwei Bearbeitungen komponierte, während die Zahlenwerte der Titel der Mittelstücke - nach nicht weniger als zwei Aspekten - bereits feststanden, nämlich für das zentrale Stück 14 (und auch 13), "Wir glauben all' an e i n e n Gott" = 247, und für Stücke 15 und 16, "Vater unser im Himmelreich" = 255. Diese Beziehungen und deren Eigenschaften, Isopsephie und Faktorenzerlegungen, sind Zufälle, nicht aber deren zielgerichteter Einsatz durch Bach.

Legitimiert nicht Bach selbst auf seiner Titelseite der "Clavierübung" - gewidmet "denen Liebhabern und besonders denen Kennern von dergleichen Arbeit, zur Gemuths Ergezung" - deren gründliches Studium? Alle obigen Feststellungen waren leicht zu finden, wobei etwas Kopfrechnen hilfreich ist, sowie ein gewisses Zahlengedächtnis, insbesondere auch für die Entsprechungen des Alphabets, sowie die Fähigkeit, damit die Zahlenwerte von Textworten in einigen Sekunden auszurechnen. Aber wie war es möglich, daß Bach diese schwindelerregende Fülle von simultanen Zahlenbeziehungen konstruieren konnte? Hier hilft ein Hinweis aus dem Nekrolog[18]: "Er durfte nur irgend einen Hauptsatz (Thema) gehöret haben, um fast alles, was nur künstlisches darüber hervor gebracht werden konnte, gleichsam im Augenblicke gegenwärtig zu haben". Das Wesentliche ist darin die Schnelligkeit Bachs, und zwar geht es primär um die Ergebnisse eines rein rationalen Prozesses, aus denen Bach mit unfehlbarem ästhetischem Sinn und Geschmack das "musikalisch Schöne" heraussiebte und beibehielt. Ich bin überzeugt, daß Bach die Gabe eines "Wunderrechners" hatte; diese Vermutung wurde bereits durch Guillard[19] ausgesprochen. Derartige Rechengenies multiplizieren im Kopf zwei zwölfstellige Zahlen in 30 Sekunden: es ist erfreulich, daß die Bachforschung die bereits vorhandenen gründlichen psychologischen Studien derartiger Phänomene nur noch zur Kenntnis zu nehmen braucht[20], um die Entstehung von Bachs Musik leichter und vor allem adäquater zu verstehen.

4. Epilog zur "ratio superparticularis" von 369

Im Sinne der barocken Akustik charakterisiert 369 quantitativ exakt Bachs Wohltemperirung. In der Clavierübung zeigt sich außer der Länge der Vier Duette von 369 Takten, daß deren Stück No. 5, "Kyrie, Gott Vater in Ewigkeit", mit Takt 369 beginnt. Im WTC I sind in der e-Moll Fuge - die einzige mit zwei Stimmen - ab Takt 19 und wieder ab Takt 38 (=2x19) bisher rätselhafte offene Oktavparallelen gesetzt, doch sind diese ganz einfach als Symbol der unitas in der Zweistimmigkeit zu interpretieren: zu Takt 38 führen im Diskant 369 Tonanschläge, im Baß 19 Töne weniger, 350=5x7x10, mit den Quintzahlen. In dieser Fuge haben die Stimmen 420 bzw. 390 Töne, siehe Hahn[21], und deren Verhältnis ist 14/13, "ratio superparticularis" von 13.

Das Quadrat 37x37 (= J. CHR., Christusmonogramm), im Sinne einer numerologischen Verstärkung, ergibt 1369, die Juxtaposition von unitas sowie 369, mit 1+3+6+9=19. Das g-Moll-Praeludium endet auf Takt 1369, hat 19 Takte und dessen Fuge 34, wobei im g-Moll-Dreiklang Kleinterz und Großterz im Verhältnis 7:5 schweben. Die Stücke in H-Dur, der Temperierungstonart, sind auch 19 bzw. 34 Takte lang, zusammen 53 - Quint und Terz im Generalbaß. Immer noch im WTC I, ist in dem scheinbar so regelmäßigen C-Dur-Praeludium der erste Ton von Takt 24 (= alle Tonarten) der Anschlag No. 369, über welche Zahl als Temperierung der Quint alle Tonarten erschlossen werden. Und zu diesem Takt 24 führt die bekannte Takttriole 21, 22, 23 als Symbol der Trinität, die Schwencke mit seinem Einschub korrigieren wollte!

5. Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit erbrachte durch den quantitativen Nachweis der 369 für die Quint, als erstes temperierbares Intervall, einen Authentizitätsbeweis der Rekonstruktion der Bachschen Wohltemperirung, und zwar im Kontext der Duette[22]. Zugleich wurde deren Funktion innerhalb der "Clavierübung" unter einem einheitlichen Gesichtspunkt gedeutet: als Bachs verschlüsselte Spezifikation und höchst rationale Anleitung zur Musicalischen Temperatur. Weiteres wurde an dem Parallelbeispiel zweier Werktitel gezeigt, wie sich sowohl Bach als auch Werckmeister in gleicher Art der Möglichkeiten des barocken

Zahlenalphabets für ihre Zwecke bedient haben. Auch war zweifellos bereits Werckmeister mit der Wohltemperirung im Sinne Bachs vertraut, was diesem keinesfalls entgangen sein konnte. Allerdings hatte nur ein Genie von Bachschem Format die Gabe, dieses System kompositorisch und spirituell auszuschöpfen - im "Wohltemperirten Clavier"[23] und allen seinen anderen Kompositionen. Schließlich ist zu vermuten, daß Bach angesichts seiner Zahlenkonstruktionen die Möglichkeiten eines "Wunderrechners" hatte. Die dazu erforderlichen eidetischen Fähigkeiten - die von der Psychologie untersucht wurden - sind auch vergleichbar mit jenen eines Schachspielers. Auf dieser psychologischen Basis wird das Zustandekommen gewisser Kompositionen Bachs begreiflicher, so z.B. der Krebskanon aus dem Musicalischen Opfer, oder die Variationen "Vom Himmel hoch da komm ich her", etc.

Während dies für Alban Berg wohlbekannt ist, wären im Ausblick Untersuchungen wünschenswert, ob und wie z.B. Händel, Walther, Scarlatti, Telemann oder Zelenka gleichfalls Methoden des numerologischen Manierismus gehuldigt haben.

Anmerkungen

1) Herbert Anton Kellner, Neue Perspektiven der Bach-Forschung, in: ÖMZ 40 (1985), S. 73-81.

2) Manfred Tessmer (Hrsg.), Neue Bach-Ausgabe Serie IV, Orgelwerke Bd. 4, Kritischer Bericht (1974); Einzelausgabe der Duette BWV 802-805, Kassel etc. 1971.

3) Sigalia Dostrovsky, Early vibration theory, in: Archive History of Exact Sciences 14 (1975), S. 169-218.

4) Andreas Werckmeister, Musicalische Temperatur, Quedlinburg 1691, S. 24.

5) Johann Gottfried Walther, Praecepta der Musicalischen Composition, Hrsg. Peter Benary (Jenaer Beiträge zur Musikforschung, hrsg. von Heinrich Besseler), Leipzig 1955, S. 82, 76. Siehe auch Andreas Werckmeister, Hodegus, 1686, S. 77 und 147.

6) Georg Conrad Marty, Europaischer Ingenieur, cap. 8 der ersten Abtheilung, 1687, S. 111.

7) Robert W. Ricks, Letters to the Editor, in: Journal of Music Theory 5 (1961), S: 334 über die Teiltöne 7, 11 und 13. Ferner Thomas G. MacCracken, Die Verwendung der Blechblasinstrumente bei J.S. Bach unter besonderer Berücksichtigung der Tromba da tirarsi, in: Bach-Jb. 1984, S. 59-89, insbes. S. 64 und 89; ferner Peter Damm, Zur Aufführung des Corne da Caccia" im Quoniam der Missa h-Moll von J.S. Bach, in: BJ 1984, S: 91-105, insbes. S. 105.

8) Werckmeister, a.a.O., S: 75 und 76.

9) Werckmeister, a.a.O., S. 73 und 74.

10) Kurt von Fischer, Zum Formproblem bei Bach, Studien an den Inventionen, Sinfonien und Duetten, in: Bach-Gedenkschrift 1950, Hrsg. Karl Matthaei, Zürich 1950, S. 150-162; Hermann Keller, Die Klavierwerke Bachs, Leipzig 1950, S. 209-212; Gerhard Friedemann, Bach zeichnet das Kreuz, die Bedeutung der vier Duetten aus dem Dritten Theil der Clavierübung, Pinneberg 1963; Christian Brückner, J.S. Bach, Dritter Theil der Clavier Übung, in: Musik und Gottesdienst, Heft 3 und 4, 1973; Th. van Huystee, Die vier Duette aus Bachs Drittem Theil der Clavier Übung, in: MuK 43

(1973), S. 275-282; Reinhold Birk, Die Bedeutung der Vier Duette in Bachs Klavierübung III, in: MuK 46 (1976), S. 63-69.

11) Jean-Jacques Rousseau, Dictionnaire de musique, Paris 1768. Artikel "Copiste", S. 124-135.

12) Herbert Anton Kellner, Das C-dur-Praeludium BWV 846 und Forkels Variante, in: Kgr.-Ber. Bayreuth 1981, Hrsg. Christoph-Helmut Mahling und Sigrid Wiesmann, Kassel 1984, S. 332-339.

13) Ulrich Siegele, Bachs theologischer Formbegriff und das Duett F-Dur (= Tübinger Beiträge zur Musikwissenschaft, Bd. 6), Neuhausen-Stuttgart 1978.

14) Herbert Anton Kellner, Wie stimme ich selbst mein Cembalo? (^{3}/1986), Verlag E. Bochinsky, Frankfurt/Main, S. 42.

15) Herbert Anton Kellner, Das ungleichstufige, wohltemperierte Tonsystem, in: Bachstunden, Festschrift für Helmut Walcha, hrsg. von Walther Dehnhard und Gottlob Ritter, Frankfurt/Main 1978, S. 75-91.

16) Siegmund Helms, Zahlen in J.S. Bachs Matthäus-Passion, in: MuK 40, 1970, I S. 18, II S. 100.

17) Herbert A. Kellner, Is there an Enigma in Werckmeister's "Musicalische Temperatur"?, in: The English Harpsichord Magazine (EHM) 3 (1984), S. 134-136; One typographical Enigma in Werckmeister, "Musicalische Temperatur", in: EHM 3 (1985), S. 146-151; Did Werckmeister already know the Tuning of J.S. Bach for the Forty-Eight?, in: EHM 4 (1985), S. 7-11. Siehe auch Herbert Anton Kellner, A propos d'une réimpression de la "Musicalische Temperatur" (1691) de Werckmeister, in: Revue de Musicologie 71 (1985).

18) Hans Joachim Schulze, J.S. Bach, Leben und Werk, München und Kassel ^{2}/1984, S. 193.

19) Georges Guillard, La symbolique des nombres chez J.-S. Bach, in: L'Orgue No. 188 (1983), S. 1-11, insbes. S. 8.

20) Alfred Binet, La psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs. Paris 1894, Neudruck Paris 1981; Robert Tocquet, 2+2=4, Les calculateurs prodiges et leurs secrets, Paris 1975; Steven B. Smith, The Great Mental Calculators: The psychology, methods, and lives of calculating prodigies, past and present, New York, N.Y., 1983; E.F. Clark, Georg Parker Bidder: The Calculating Boy. Bedford 1983. Helmut Kuhn, Wim Klein - Genie, Clown oder Wissenschaftler. Hamburg 1983.

21) Harry Hahn, Symbol und Glaube im 1. Teil des Wohltemperierten Klaviers von J.S. Bach, Wiesbaden 1973.

22) Herbert Anton Kellner, How Bach quantified his well-tempered tuning within the Four Duets, in: The (English) Harpsichord Magazine 4/2 (1986).

23) Herbert Anton Kellner, "Das wohltemperirte Clavier": Implications de l'accord inégal pour l'oeuvre et son autographe, in: RMl 71 (1985).